MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE FILIALA OLT
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN OLT

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026

CLASA A VI-a

Soluții și bareme de corectare

SUBIECTUL I (40 de puncte)

Subiect	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Răspuns corect	D	B	C	E	E	C	A	E	C	D
	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p	4p

SUBIECTUL II (25 de puncte)

Unghiurile $\sphericalangle P_1OP_2, \sphericalangle P_2OP_3, \sphericalangle P_3OP_4, \ldots, \sphericalangle P_8OP_9$ au interioarele disjuncte, iar $\sphericalangle P_1OP_9$ este alungit. Dacă $\sphericalangle P_1OP_2 = n_1^\circ$, $\sphericalangle P_2OP_3 = n_2^\circ$, ..., $\sphericalangle P_8OP_9 = n_8^\circ$, unde $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_8$ sunt numere naturale prime distincte de două cifre și $n_1 > n_8 > n_7 > n_2 > n_3 > n_6 > n_5 > n_4$, atunci arătați că:

a) $OP_5 \perp OP_1$

b) semidreapta (OP_5 este bisectoarea unghiului $\sphericalangle P_3OP_7$;

c) $\sphericalangle P_1OP_3 = \sphericalangle P_3OP_7 = \sphericalangle P_7OP_9$.

Soluție.

a) Cum $\sphericalangle P_1OP_9 = \sphericalangle P_1OP_2 + \sphericalangle P_2OP_3 + \ldots + \sphericalangle P_8OP_9$ și $\sphericalangle P_1OP_9$ este unghi alungit, rezultă că $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_8 = 180$ **2p**

Suma celor mai mici 8 numere prime de două cifre este $11+13+17+19+23+29+31+37=180$, deci $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_8$ sunt chiar 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 (nu neapărat în această ordine) **4p**

Cum $n_1 > n_8 > n_7 > n_2 > n_3 > n_6 > n_5 > n_4$, deducem că $n_1 = 37$, $n_2 = 23$, $n_3 = 19$, $n_4 = 11$, $n_5 = 13$, $n_6 = 17$, $n_7 = 29$ și $n_8 = 31$ **3p**

Atunci $\sphericalangle P_1OP_5 = \sphericalangle P_1OP_2 + \sphericalangle P_2OP_3 + \sphericalangle P_3OP_4 + \sphericalangle P_4OP_5 = 37^\circ + 23^\circ + 19^\circ + 11^\circ = 90^\circ$, deci $OP_5 \perp OP_1$ **2p**

b) $\sphericalangle P_3OP_5 = \sphericalangle P_3OP_4 + \sphericalangle P_4OP_5 = 19^\circ + 11^\circ = 30^\circ$ **2p**

$\sphericalangle P_5OP_7 = \sphericalangle P_5OP_6 + \sphericalangle P_6OP_7 = 13^\circ + 17^\circ = 30^\circ$ **2p**

Cum $\sphericalangle P_3OP_5 = \sphericalangle P_5OP_7$, rezultă că semidreapta OP_5 este bisectoarea unghiului $\sphericalangle P_3OP_7$ **2p**

c) $\sphericalangle P_1OP_3 = \sphericalangle P_1OP_2 + \sphericalangle P_2OP_3 = 37^\circ + 23^\circ = 60^\circ$ **2p**

$\sphericalangle P_3OP_7 = \sphericalangle P_3OP_4 + \sphericalangle P_4OP_5 + \sphericalangle P_5OP_6 + \sphericalangle P_6OP_7 = 19^\circ + 11^\circ + 13^\circ + 17^\circ = 60^\circ$ **2p**

$\sphericalangle P_7OP_9 = \sphericalangle P_7OP_8 + \sphericalangle P_8OP_9 = 29^\circ + 31^\circ = 60^\circ$ **2p**

Așadar, $\sphericalangle P_1OP_3 = \sphericalangle P_3OP_7 = \sphericalangle P_7OP_9 = 60^\circ$ **2p**

SUBIECTUL III (25 de puncte)

Determinați numărul minim și numărul maxim de divizori ai numărului $\overline{abcabc}$, știind că $\overline{abc}$ este pătrat perfect.

Supliment Gazeta Matematică nr. 10 / 2025

Soluție. Vom folosi faptul că dacă numărul natural x admite descompunerea în factori primi $x=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$, unde $p_1,p_2,\ldots,p_n$ sunt numere prime distincte două câte două, atunci numărul divizorilor lui x este egal cu $(k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_n+1)$.

Fie $n=\overline{abcabc}=\overline{abc}\cdot1001=\overline{abc}\cdot7\cdot11\cdot13$ **3p**

$\overline{abc}$ este pătrat perfect și $10^2=100\le\overline{abc}\le999<1024=32^2$, deci $\overline{abc}\in\{10^2,11^2,12^2,\ldots,31^2\}$ **4p**

Dacă $\overline{abc}=p^2$, unde p este număr prim, $p\neq11$, $p\neq13$, atunci $n=p^2\cdot7^1\cdot11^1\cdot13^1$, deci n are $(2+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=3\cdot2\cdot2\cdot2=24$ de divizori **4p**

Dacă $p=11$ sau $p=13$, atunci $n=7^1\cdot13^1\cdot11^3$ sau $n=7^1\cdot11^1\cdot13^3$, iar în fiecare dintre aceste cazuri n are $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(3+1)=2\cdot2\cdot4=16$ divizori **4p**

Dacă $\overline{abc}=q^2$, unde q este număr compus, atunci $10\le q\le30$. Cum $2\cdot3\cdot5=30$, rezultă că q are trei divizori primi distincți doar dacă $q=30$, iar dacă $q<30$, atunci q are cel mult doi divizori primi distincți. În plus, cum $7^2>q$, cel mult unul dintre factorii primi 7, 11, 13 apare în descompunerea lui q, și doar la puterea 1.

Ca urmare, este necesar să analizăm trei cazuri, în funcție de formele pe care le poate avea q:

- Dacă $q=2\cdot3\cdot5$, atunci $n=2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7\cdot11\cdot13$, deci n are $3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2=216$ divizori
- Dacă $q=c\cdot a^x$, unde a este prim, diferit de 7, 11, 13, iar $c\in\{7,11,13\}$, atunci $n=a^{2x}\cdot c^3\cdot d\cdot e$, unde $\{c,d,e\}=\{7,11,13\}$, deci n are $16\cdot(2x+1)$ divizori.
- Dacă $q=a^x\cdot b^y$, unde $a,b\notin\{7,11,13\}$ sunt prime distincte, atunci $n=a^{2x}\cdot b^{2y}\cdot7\cdot11\cdot13$, deci n are $8\cdot(2x+1)(2y+1)$ divizori.

..... **6p**

Presupunând că n ar putea avea mai mult de 216 divizori, ar rezulta că are loc una dintre relațiile:

- $16\cdot(2x+1)>216$, de unde $x\ge7$, deci $q\ge2^7\cdot c=128\cdot c>30$, imposibil
- $8\cdot(2x+1)(2y+1)>216$, adică $(2x+1)(2y+1)>27$, deci cel puțin unul dintre numerele (impare) $2x+1$ și $2y+1$ trebuie să fie cel puțin egal cu 7, altfel am avea $27<(2x+1)(2y+1)\le5\cdot5=25$, fals. Dacă de exemplu, $2x+1\ge7$, atunci $x\ge3$, iar singurul număr q între 12 și 30 divizibil cu un cub perfect este $24=2^3\cdot3$, care nu îndeplinește condiția $(2x+1)(2y+1)>27$ (avem $x=3,y=1$)

În concluzie, numărul minim de divizori ai lui n este 16, iar numărul maxim de divizori este 216 ..... **4p**